8 клас (алгебра, поглиблене вивчення)

Тема: Многочленні та дробово-раціональні рівняння, що зводяться до квадратних.

Після вивчення теми «Квадратні рівняння. Теорема Вієта» учням можна запропонувати самостійн, ключові слова, які мають засвоїти учніо вивчити методи розв'язування многочленних та дробово-раціональних рівнянь, які зводяться до квадратних. Нижче пропонуємо план вивчення теми, ключові поняття, які мають засвоїти учні та завдання до самоконтролю.

План до теми:

1. Основні означення.
2. Біквадратні та симетричні рівняння.
3. Зворотні рівняння.
4. Однорідні рівняння.
5. Інші типи рівнянь, що зводяться до квадратних.

Ключові слова:

Рівняння з однією змінною; корені рівняння; раціональні рівняння; дробово-раціональні рівняння; квадратні рівняння; дискримінант; біквадратні рівняння; теорема Вієта; симетричні рівняння; зворотні рівняння; кососиметричні рівняння; однорідні рівняння.

Учні повинні:

Знати

- Означення рівнянь, що зводяться до квадратних;
- Формули дискримінанта, коренів квадратного рівняння;
- Залежність між дискримінантом та кількістю коренів квадратного рівняння;
- Основні типи заміни змінних у рівняннях.

Вміти

- Розпізнавати квадратні рівняння серед інших рівнянь;
- Розв'язувати квадратні рівняння за формулою коренів квадратного рівняння;
- Застосовувати пряму та обернену теорему Вієта;
- Розв'язувати раціональні та дробово-раціональні рівняння, що зводяться до квадратних рівнянь;
- Розв'язувати інші типи рівнянь, що зводяться до квадратних.

Завдання для самоконтролю:

1. Розв'язати біквадратне рівняння $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$
Відповідь: $\{\pm\sqrt{5}\}$.

2. Розв'язати біквадратне рівняння $x^4 - 16 = 0$.
Відповідь: $\{\pm 2\}$.

3. Розв'язати симетричне рівняння $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.
Відповідь: $\left\{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

4. Розв'язати зворотне рівняння $15x^4 - 16x^3 - 30x^2 + 16x + 15 = 0$.
Відповідь: $\left\{\pm 1; -\frac{3}{5}; \frac{5}{3}\right\}$.

5. Розв'язати рівняння $\frac{x^2 - 3x}{x - 2} + \frac{x - 2}{x^2 - 3x} = \frac{5}{2}$.
Відповідь: $\{4; 1\}$.

6. Розв'язати рівняння $\frac{2x}{x^2 - 2x + 5} + \frac{3x}{x^2 + 2x + 5} = \frac{7}{8}$.
Відповідь: $\{1; 5\}$.

7. Розв'язати зворотне рівняння $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$.
Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_{3,4} = \pm 2$.

8. Розв'язати рівняння $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{27}{4}$.
Відповідь: $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_{3,4} = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{4}$.

9. Розв'язати рівняння $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$.
Відповідь: $\{-3; -5\}$.

10. Розв'язати рівняння $\frac{24}{x^2 + 2x - 8} - \frac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2$.
Відповідь: $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{66}}{2}$; $x_4 = -2$.

ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

Многочленні та дробово-раціональні рівняння, що зводяться до квадратних

1. Основні означення

Означення. *Рівнянням з однією змінною* називається рівність виду $f(x)=\varphi(x)$, де $f(x)$ і $\varphi(x)$ – деякі задані функції. Величина x називається *невідомою*.

Означення. *Коренем* рівняння називається таке значення невідомого x, підстановка якого в обидві частини рівняння перетворює його на правильну числову рівність.

Розв'язати рівняння – це значить знайти всі його корені або довести, що їх немає.

У загальному випадку алгебраїчне рівняння має вигляд

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (n \in N,\ a_0 \neq 0),$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – відомі дійсні числа.

Залежно від значення n алгебраїчні рівняння поділяють на:

– лінійні ($n=1$),
– квадратні ($n=2$),
– рівняння вищих степенів ($n>3$).

Означення. Рівняння $f(x)=\varphi(x)$ називається *раціональним*, якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ – многочлени. При цьому, якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ – цілі вирази, то рівняння називається *цілим раціональним*; якщо ж хоча б один з виразів $f(x)$ і $\varphi(x)$ є дробовим, то рівняння називається *дробово-раціональним.*

2. Біквадратні та симетричні рівняння

Серед алгебраїчних рівнянь 4-го порядку підлягають універсалізації *біквадратні* та *симетричні рівняння.*

Означення. Рівняння виду $ax^4+bx^2+c=0$, де $a \neq 0$, називається *біквадратним рівнянням.*

Біквадратні рівняння зводяться до квадратних заміною $x^2=t$.

Означення. Рівняння виду $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, де $a \neq 0$, називається *симетричним рівнянням четвертого степеня.*

Симетричні рівняння зводяться до квадратних заміною $x+\dfrac{1}{x}=t$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^4-10x^2+9=0$.

Розв'язання.

Це рівняння є біквадратним. Тому робимо заміну змінних $x^2=t$. Матимемо таке квадратне рівняння:

$$t^2-10t+9=0.$$

Обчислюємо дискримінант

$$D=10^2-4\cdot1\cdot9=100-36=64$$

і знаходимо корені

$$t_1=\frac{10-\sqrt{64}}{2\cdot1}=1; \qquad t_2=\frac{10+\sqrt{64}}{2\cdot1}=9.$$

Повертаємось до змінної x:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 1, \\ x^2 = 9; \end{array}\right. \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ x_3 = -3;\ x_4 = 3.$$

Відповідь: $x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ x_3 = -3;\ x_4 = 3.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$.

Розв'язання.

Це рівняння є симетричним. Після ділення обох частин даного рівняння на x^2 і групування доданків з однаковими коефіцієнтами отримаємо:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 11 = 0.$$

Введемо нову змінну $x + \frac{1}{x} = t$. Одержимо квадратне рівняння:

$$2\left(t^2 - 2\right) + t - 11 = 0,$$

розв'язки якого $\left[\begin{array}{l} t = \frac{5}{2}, \\ t = -3. \end{array}\right.$

Повертаємось до змінної x:

$$\left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \\ x + \frac{1}{x} = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ x^2 + 3x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x_1 = 2;\ x_2 = \frac{1}{2};\ x_3 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2};\ x_4 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$$

Відповідь: $x_1 = 2;\ x_2 = \frac{1}{2};\ x_3 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2};\ x_4 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$

3. Зворотні рівняння

Означення. Рівняння четвертого степеня виду

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \qquad (3.1)$$

називається *зворотним,* якщо коефіцієнти рівняння, *a, b, d, e* зв'язані рівністю $d = \lambda b$, $e = \lambda^2 a$ (λ —відмінне від нуля деяке число).

Використовуючи цей зв'язок між коефіцієнтами, рівняння (3.1) можна записати у вигляді:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + \lambda bx + \lambda^2 a = 0 \qquad (3.2)$$

Оскільки $x = 0$ не є коренем рівняння (3.1), то, розділивши почленно обидві частини рівняння (3.2) на x^2 і, провівши відповідне групування членів лівої частини рівняння, отримаємо рівняння, еквівалентне рівнянню (3.2):

$$a\left(x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{\lambda}{x}\right) + c = 0.$$

Тепер заміною $y = x + \frac{\lambda}{x}$ (враховуючи, що $x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2} = y^2 - 2\lambda$) останнє рівняння зводиться до квадратного рівняння відносно *y:*

$$ay^2 + by + c - 2\lambda a = 0 \qquad (3.3)$$

Розв'язавши рівняння (3.3), отримаємо, що розв'язок зворотного рівняння (3.2) зводиться до розв'язання двох квадратних рівнянь:

$$x^2 - y_1 x + \lambda = 0 \text{ та } x^2 - y_2 x + \lambda = 0,$$

де y_1 і y_2 – корені рівняння (3.3).

Частковими випадками зворотного рівняння є

симетричне рівняння (при $\lambda = 1$) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$;

кососиметричне рівняння (при $\lambda = -1$) $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx - a = 0$.

Заміною $y = x + \frac{1}{x}$ для симетричного і $y = x - \frac{1}{x}$ для кососиметричного рівнянь ці рівняння зводяться до квадратних відносно змінної y.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$.

Розв'язання.

Дане рівняння є зворотним та кососиметричним рівнянням четвертого степеня ($\lambda = -1$). Оскільки $x = 0$ не є коренем цього рівняння, то, поділивши його на x^2, отримаємо:

$$2x^2 + 3x - 3 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0.$$

Провівши відповідне групування членів лівої частини рівняння, отримаємо:

$$2\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 3 = 0.$$

Зробивши заміну $y = x - \frac{1}{x}$, отримаємо квадратне рівняння відносно y:

$$2y^2 + 3y + 1 = 0.$$

Коренями цього рівняння є $y_1 = -1$ та $y_2 = -\frac{1}{2}$.

Таким чином, початкове рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x - \frac{1}{x} = -1 \\ x - \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x_3 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \\ x_4 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$$

Отже, ці чотири корені є розв'язком початкового рівняння.

Відповідь: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; x_3 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}; x_4 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$.

4. Однорідні рівняння

Розглянемо рівняння виду

$$af^2(x) + bf(x) + cg^2(x) = 0,$$

де $f(x)$ та $g(x)$ – многочлени степенів m і n відповідно, $m \in N$, $n \in N$.

Оскільки це рівняння є однорідним відносно многочленів $f(x)$ і $g(x)$, то і називається воно *однорідним*.

Якщо йти стандартним шляхом, тобто виконати всі дії в лівій частині рівняння, то отримаємо многочлен степеня k, де $k \geq 4$. Тому доцільніше застосувати такий нестандартний підхід: поділити обидві частини даного рівняння на $f^2(x)$ (або $g^2(x)$), зауваживши, що $f(x) \neq 0$ (або $g(x) \neq 0$).

Очевидно, що коренями даного рівняння є значення змінної x, для яких $f(x)=g(x)=0$. Якщо такі значення x існують, знайти їх, розв'язавши рівняння $f(x)=g(x)=0$.

Неважко пересвідчитися, що значення змінної, для яких тільки $f(x)=0$ (або $g(x)=0$), не є розв'язками рівняння. Отже, при діленні на $f^2(x)$ (або $g^2(x)$) коренів не втратимо.

Після ділення обох частин рівняння на $f^2(x)$ (або $g^2(x)$) матимемо рівняння

$$a\frac{f^2(x)}{g^2(x)}+b\frac{f(x)}{g(x)}+c=0.$$

Ввівши нову змінну $t=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, отримаємо квадратне рівняння $at^2+bt+c=0$.

Розв'язавши його і повернувшись до змінної x, одержимо рівняння, степінь якого дорівнюватиме степеню многочлена $f(x)$ (або $g(x)$). Тобто вихідне рівняння зміниться на рівносильне йому рівняння вдвічі меншого степеня.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння у вигляді

$$2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2-13(x^2+x+1)(x-1)=0.$$

Нехай $f(x)=x^2+x+1$, а $g(x)=x-1$.

Перевіримо, чи має рівняння корені, за умови $f(x)=g(x)=0$. Для цього розв'яжемо рівняння $x^2+x+1=x-1$.

Маємо: $x^2+2=0$, отже, коренів немає.

Поділимо обидві частини рівняння на $g^2(x)$. Отримаємо:

$$2\left(\frac{x^2+x+1}{x-1}\right)^2-13\frac{x^2+x+1}{x-1}-7=0.$$

Введемо нову змінну $t=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. Матимемо квадратне рівняння

$$2t^2-13t-7=0,$$

розв'язки якого $\left[\begin{array}{l} t=7 \\ t=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Повернемося до змінної x:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+x+1}{x-1}=7 \\ \dfrac{x^2+x+1}{x-1}=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x+8=0 \\ 2x^2+3x+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=2, \\ x=-1, \\ x=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1=4;\ x_2=2;\ x_3=-1;\ x_4=-\dfrac{1}{2}$.

5. Інші види рівнянь, що зводяться до квадратних

<u>Рівняння виду</u> $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=A$, де $a<b<c<d$, $b-a=d-c$.

Після заміни $y = x - \frac{a+b+c+d}{4}$ і розкривання дужок отримуємо біквадратне рівняння.

<u>Рівняння виду</u> $(x-a)^4 \pm (x-b)^4 = A$.

Використати заміну $y = x - \frac{a+b}{2}$, яка зводить початкове рівняння до біквадратного.

<u>Рівняння виду</u> $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = Ax^2$, де $ab = cd$.

Перемноживши першу дужку на другу, а третю – на четверту, поділити на x^2. Потім зробити заміну $y = x + \frac{ab}{x}$.

<u>Рівняння виду</u> $\frac{Ax}{ax^2 + b_1x + c} + \frac{Bx}{ax^2 + b_2x + c} = C$, де $ABC \neq 0$, $ac \neq 0$

або

$$\frac{ax^2 + b_1x + c}{ax^2 + b_2x + c} \pm \frac{ax^2 + b_3x + c}{ax^2 + b_4x + c} = A, \text{ де } ac \neq 0.$$

Рівняння цього виду розв'язуються за допомогою заміни $y = ax + \frac{c}{x}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 24$.

Розв'язання.

Перемножимо двочлен у перших дужках на двочлен у четвертих, двочлен у других дужках на двочлен у третіх. Після чого одержимо:

$$(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 4) = 24.$$

Введемо нову змінну $t = x^2 - 5x$.

Матимемо квадратне рівняння

$$(t+6)(t+4) = 24,$$

розв'язки якого $\left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = -10. \end{array}\right.$

Повернемося до змінної x: $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x = 0 \\ x^2 - 5x = -10 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 5, \\ \varnothing. \end{array}\right.$

Відповідь: $x_1 = 0$; $x_2 = 5$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\frac{24x}{2x^2 - 3x + 4} = \frac{12x}{x^2 + x + 2} + 5$.

Розв'язання.

Перепишемо дане рівняння у вигляді:

$$\frac{12x}{x^2 - 1{,}5x + 2} - \frac{12x}{x^2 + x + 2} = 5.$$

Перевіримо, чи є $x = 0$ коренем рівняння. Оскільки 0 не є коренем рівняння, то поділимо чисельник і знаменник кожного дробу на x.

Одержимо:

$$\frac{12}{x-1{,}5+\frac{2}{x}}-\frac{12}{x+1+\frac{2}{x}}=5.$$

Введемо нову змінну $t=x+\frac{2}{x}$. Матимемо рівняння

$$\frac{12}{t-1{,}5}-\frac{12}{t+1}=5,$$

яке зводиться до квадратного

$$2t^2-t-15=0,$$

розв'язки якого $\left[\begin{array}{l} t=3, \\ t=-\frac{5}{2}. \end{array}\right.$

Повернемося до змінної x:

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{2}{x}=3 \\ x+\frac{2}{x}=-\frac{5}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=0 \\ 2x^2+5x+4=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \\ \varnothing. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1=1$; $x_2=2$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $(x-3)^4+(x-5)^4=2$.

Розв'язання.

Нехай $t=x+\frac{-3-5}{2}=x-4 \quad \Rightarrow \quad x=t+4$.

Підставивши цей вираз у рівняння, отримаємо

$$(t+1)^4+(t-1)^4=2.$$

Розкривши дужки та звівши подібні доданки, матимемо неповне біквадратне рівняння

$$t^4+6t^2=0,$$

розв'язок якого $t=0$.

Повертаючись до змінної x, одержимо $x=4$.

Відповідь: $x=4$.